



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ



MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „PETRU MAIOR”**Colegiul „Petru Maior” Reghin****EDIȚIA a II-a, 9.04.2022****Clasa a X-a****BAREM DE EVALUARE ȘI CORECTARE***Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***Problema 1:**

$$\ln(\operatorname{ctg} 1^\circ) + \ln(\operatorname{ctg} 2^\circ) + \dots + \ln(\operatorname{ctg} 89^\circ) =$$

$$= \ln(\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ) = \quad 2p$$

$$= \ln(\operatorname{ctg}(90^\circ - 89^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - 88^\circ) \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ) =$$
$$= \ln(\operatorname{tg} 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ) =$$

$$= \ln 1 = 0 \quad 5p$$

Problema 2:

a) $f_1(x) + f_1\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{2},$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2 + 2x^2, \quad x = 1 \quad 2p$$

b)

$$2 \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \sqrt{3},$$

$$2 \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\left| \frac{1}{\cos x} \right|} = \sqrt{3}$$

$$\text{Caz I: } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \cos x > 0, \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Caz II: } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \cos x < 0, \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x = \frac{4\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\} \quad 2p$$

c)

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{2x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} \quad 1p$$

....

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \text{ (se demonstrează prin inducție matematică)} \quad 1p$$

Problema 3:

$$\text{CE: } x > 0, x \neq 1 \quad 1p$$

Notând $\log_2 x = a$ ecuația devine:

$$\frac{a+1+|a-1|}{\sqrt{a}} = 4, \quad a > 0, \quad 4p$$

$$\text{cu soluțiile } a = 4 \text{ și } a = \frac{1}{4}. \text{ De unde } x \in \{16, \sqrt[4]{2}\}. \quad 2p$$

Problema 4:

$$\text{Fie } z_1 = a + bi, z_1 = c + di$$

$$z_1 - z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow b = d \neq 0 \quad 1\text{p}$$

$$z_2^2 = (c + di)^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow cd = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow z_2 = di = bi$$

$$z_2 = \frac{1 - \overline{z_1}}{1 + \overline{z_1}} = \frac{1 - a + bi}{1 + a - bi} = \frac{1 - a^2 - b^2}{(1 + a)^2 + b^2} + i \frac{2b}{(1 + a)^2 + b^2} = bi \quad 2\text{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - a^2 - b^2}{(1 + a)^2 + b^2} = 0 \text{ și } \frac{2b}{(1 + a)^2 + b^2} = b \quad 1\text{p}$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ și } b = \pm 1 \quad 2\text{p}$$

$$z_1 = z_2 = \pm i \quad 1\text{p}$$